Ερμηνεία $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$

Το $\hat{\beta}_0$ δείχνει την τιμή της Y στο X=0

Το $\hat{\beta}_1$ δείχνει την μεταβολή της Y σε μοναδιαία τιμή της X

Το $\hat{\beta}_1$ είναι η εφ(ω) = κλίση που έχει το εκτιμώμενο μοντέλο με τους δύο άξονες.

Ανάλυση Διακύμανσης στο μοντέλο α.γ.π.

$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$ ▷ Συνολική μεταβλητότητα.

$$= \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\underbrace{Y_i-\hat{Y}_i}_{e_i})^2$$ → Στο μοντέλο της α.γ.π. = 0

→ sums of square.

$\Rightarrow SS_{tot} = SS_{reg} + SS_{res}$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΔΙΑ μοντέλου α.γ.π

μέσο τετράγωνο $\frac{SS}{Β.Ε.}$

Μεταβλητότητα	SS	Β.Ε (βαθμοί ελευθερίας)	MS	F-πηλίκο
Μοντέλο α.γ.π.	SSreg	1	$MSreg = \frac{SSreg}{1}$	$F = \frac{MSreg}{MSres}$
Υπόλοιπα	SSres.	n-2	$MSres = \frac{SSres}{(n-2)}$	
Ολική	SStot.	n-1		

$$SSreg = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_i-\bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}+\hat{\beta}_1 X_i-\bar{Y})$$

$$\boxed{SSreg = \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

Βαθμός ελευθερίας ενός αθροίσματος τετραγώνων είναι το πλήθος των ανεξάρτητων πληροφοριών που απαιτούνται για τον υπολογισμό του αντίστοιχου SS.

↳ για να μπορώ να υπολογίσω το άθροισμα

→ Πόσους όρους πρέπει να ξέρω για να μπορώ να υπολογίσω το άθροισμα

Θέλω $n-1$ στο SStot·

διοτι Στο $SStot = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \Rightarrow \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i \Rightarrow Y_n = n\bar{Y} - \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$

β.Ε. SStot : Μέγεθος Δειγματος $-1 = n-1$

β.Ε SSreg : Πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών του μοντέλου $= 1$

β.Ε SSres : Αφαίρεση β.ΕSStot − β.ΕSSres

Ερμηνεία πίνακα ανόβα

Αν SSreg >> SSres τοτε το μεγαλυτερο μέρος της ολικής μεταβλητότητας ερμηνεύεται απο το μοντέλο πχ.α.γ.π → Υποσχόμενο μοντέλο.

Αν SSreg << SSres τοτε έχω ένα φτωχό μοντέλο ~ Δηλαδή πρέπει να εισάγω και άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές.

Με τον ίδιο τροπο θα μπορούσα να το ερμηνεύσω και μετα μέσα τετράγωνα.

β.Ε του SStot :

$$SStot = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$$

Γνωρίζω $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i \Rightarrow n\bar{Y} = \sum Y_i \Rightarrow n\bar{Y} = Y_n + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y_n = n\bar{Y} - \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$$

Οποτε $Y_n - \bar{Y} = n\bar{Y} - \sum_{i=1}^{n-1} Y_i - \bar{Y} = (n-1)\bar{Y} - \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$

$$\Rightarrow Y_n - \bar{Y} = -\left[\sum_{i=1}^{n-1} (Y_i - \bar{Y})\right]$$

$$\Rightarrow (Y_n - \bar{Y})^2 = \left[\sum_{i=1}^{n-1} (Y_i - \bar{Y})\right]^2$$

$$SStot = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i - \bar{Y})^2 + (Y_n - \bar{Y})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i - \bar{Y})^2 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} (Y_i - \bar{Y})\right]^2.$$

Συντελεστής Προσδιορισμού ή Προσαρμοστικότητας.

(2)

$$R^2 = \frac{SSreg}{SStot} = 1 - \frac{SSres}{SStot}.$$

Ιδιότητες:

① ο R^2 είναι καθαρός αριθμός

② $0 \le R^2 < 1$, Άρα ο R^2 είναι ένα ποσοστό

Η απόδειξη βασίζεται στη σχέση $SStot = SSreg + SSres$

Είναι < 1 διότι $\frac{SSreg}{SStot}$ είναι θετική ποσότητα

όμως $SStot = SSreg + SSres > SSreg$.

Για να πάρει τιμές κοντά στο 0 τότε $SSreg \ll SSres$

Αν R^2 παίρνει πολύ μεγάλες τιμές $\Rightarrow SSreg \gg SSres \Rightarrow$ υποσχόμενο μοντέλο

Ερμηνεία στην πράξη του R^2

Εκφράζει το ποσοστό της ολικής μεταβλητότητας της εξαρτημένης Y που ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X

Για περαιτέρω μελέτη-απόδειξη του μοντέλου εισάγω τις

Υποθέσεις για τα σφάλματα ε_i

Θεωρούμε τα ε_i είναι τυχαίες μεταβλητές με

① $E(\varepsilon_i) = 0, \forall i = 1, \dots n$

② $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \; \forall i = 1, \dots n$, σταθερή, κοινή διακύμανση για να μην επηρεάζεται η διακύμανση της Y από τα X_i

③ $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \;\; \substack{i,j=1,\dots n \\ i \neq j}$, δηλαδή τα σφάλματα είναι ασυσχέτιστα.

④ Τα $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \; i = 1, \dots n$.

Συνέπειες στα Y_i

① $\xrightarrow{Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i}$ $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i, \; i = 1, \dots n$

② $\longrightarrow$ $Var(Y_i) = \sigma^2, \; i = 1, \dots n$.

③ $\longrightarrow$ Τα Y_i είναι ασυσχέτιστα ως γραμμικές συναρτήσεις των ασυσχέτιστων ε_i, $Cov(Y_i, Y_j) = 0, \;\; \substack{i,j = 1, \dots n \\ i \neq j}$

(4) $\rightsquigarrow$. $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$, $i = 1, \dots n$.

Πρόταση: Υπό τις υποθέσεις για τα σφάλματα

α) $\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \ Var\,\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sigma^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)$

β) $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \sim N(\beta_0, Var(\hat{\beta}_0)) = \dfrac{\sum X_i^2}{n\sum(X_i-\bar{X})^2} \cdot \sigma^2 = \sigma^2 \left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{X}^2}{\sum(X_i-\bar{X})^2}\right\}$

Απόδειξη

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \overset{\sum X = n\bar{X}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i-\bar{X}}{\sum(X_i-\bar{X})^2} Y_i$$

Παρατηρώ ότι το $\hat{\beta}_1$ είναι γραμμικός συνδυασμός των ασυσχέτιστων κανονικών $Y_i \Rightarrow$ Άρα το $\hat{\beta}_1 \sim$ Normal.

$$E(\hat{\beta}_1) = E\left(\sum \frac{X_i-\bar{X}}{\sum(X_i-\bar{X})^2} Y_i\right) = \sum \frac{X_i-\bar{X}}{\sum(X_i-\bar{X})^2} E(Y_i) =$$

$$= \sum \frac{(X_i-\bar{X})}{\sum(X_i-\bar{X})^2}(\beta_0+\beta_1 X_i) = \beta_0 \sum \frac{X_i-\bar{X}}{\sum(X_i-\bar{X})^2} + \beta_1 \sum \frac{X_i-\bar{X}}{\sum(X_i-\bar{X})^2} X_i$$

$$= \beta_0 \frac{\sum X_i - n\bar{X}}{\sum(X_i-\bar{X})^2} + \beta_1 \frac{\sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i}{\sum(X_i-\bar{X})^2} =$$

$$= \beta_0 \frac{n\bar{X} - n\bar{X}}{\sum(X_i-\bar{X})^2} + \beta_1 \frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

$\Rightarrow E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$ Άρα ο $\hat{\beta}_1$ είναι αμερόληπτος του β_1

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} y_i\right)$$

Ισχύει : Αν $w_1, \dots, w_n$ τ.μ.

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(w_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(w_i, w_j)$$

Αν $w_i, i=1,\dots,n$ ασυσχέτιστες $Cov(w_i, w_j)=0$ Τότε

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(w_i) \quad (*)$$

Θ.Π.Σ.

Επειδή τα Y_i ασυσχέτιστα

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var\left(\sum \frac{x_i-\bar{x}}{\sum(x_i-\bar{x})^2} Y_i\right) \stackrel{(*)}{=} \sum \left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)^2 \cdot Var(Y_i)$$

$$= \sigma^2 \cdot \sum \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\left(\sum(x_i-\bar{x})^2\right)^2} = \sigma^2 \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\cancel{\sum}\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}. \quad \blacksquare$$

Η κοινή διακύμανση σ^2 των ε_i $(Var(\varepsilon_i)=\sigma^2)$ $i=1,\dots n$ είναι άγνωστη.

Το MS_{res} είναι εκτιμητής (αμερόληπτος) της σ^2

Πρόταση: Υπό τις υποθέσεις για τα σφάλματα.

$$E(MS_{res}) = \sigma^2$$

Απόδειξη: [Τα βασικά βήματα]

Είναι $MS_{res} = \frac{SS_{res}}{n-2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2.$

$$SS_{res} = SS_{tot} - SS_{reg}.$$

$$E(MS_{res}) = \frac{1}{n-1} E(SS_{res}).$$

$$E(SS_{tot}) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i-\bar{Y})^2 = \sum E\left(b_0+B_1X_i+\varepsilon_i - \frac{1}{n}\sum(b_0+B_1X_i+\varepsilon_i)\right)^2$$

$= \dots$ πράξεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι $E(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})=0$

$$\Rightarrow \boxed{E(SS_{tot}) = B_1^2\sum(X_i-\bar{X})^2 + \sum E(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})^2} \quad (1)$$

Αλλά $\sum_{i=1}^{n} E(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(E\varepsilon_i^2 - 2E(\varepsilon_i\bar{\varepsilon}) + E(\bar{\varepsilon}^2)\right)$

$\underline{E(\varepsilon_i)=0}$

$Var(\varepsilon_i)=\sigma^2$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})^2 = (n-1)\sigma^2} \quad (2)$$

Από (1), (2)

$$\boxed{E(SS_{tot}) = B_1^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + (n-1)\sigma^2} \quad (3)$$

$$E(SS_{reg}) = E\left[\hat{B}_1^2\sum(X_i-\bar{X})^2\right] = \sum(X_i-\bar{X})^2E(\hat{B}_1^2)$$

$\underline{Var(W) = E(W^2)-[E(W)]^2}$

μετά από πράξεις $\Rightarrow \boxed{E(SS_{reg}) = \sigma^2 + B_1^2\sum(X_i-\bar{X})^2} \quad (4)$

Από (3), (4)

$$E(SS_{res}) = \frac{1}{n-2}\left\{E(SS_{tot}) - E(SS_{reg})\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-2}\left\{\cancel{B_1^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} + (n-1)\sigma^2 - \sigma^2 - \cancel{B_1^2\sum(X_i-\bar{X})^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{n-2}\left((n-1)\sigma^2-\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2(n-2)}{n-2} = \sigma^2$$